TD n°8: Le théorème de représentation conforme

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un †[†] sont à faire en priorité, ceux marqués d'un †[†] sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Exercice 1. Des équivalences conformes.
On note $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \alpha\}$ où $0 < \alpha \leqslant \pi$. Démontrer que les fonctions holomorphes suivantes sont des équivalences conformes, et expliciter leurs inverses :

1. La transformation $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{H}$.
   La réciproque est $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ par les faits généraux sur les homographies (voir TD 2), elle envoie clairement $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$ car si $z = x+iy$, $y > 0$, alors $|z-i|^2 = x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 = |z+i|^2$.

2. Pour $0 < \alpha\beta \leqslant \pi$, la fonction $z \mapsto z^\beta$ de S_α vers $S_{\alpha\beta}$.
   Sur S_α (et même S_π tout entier), $z \mapsto z^\beta$ est donnée par $e^{\beta\log(z)}$, où $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leqslant 0}$, qui vérifie $e^{\log(z)} = z$ pour tout z et $\log(e^z) = z$ pour $|\Im(z)| < \pi$.
   Ainsi, $\left(z^\beta\right)^{1/\beta} = e^{\frac{1}{\beta}\log(z^\beta)}$. Comme on a $\Im(\log(z)) < \alpha$ pour $z \in S_\alpha$, on a $\Im(\beta\log(z)) < \alpha\beta \leqslant \pi$ et donc $\log(z^\beta) = \beta\log(z)$. Il en découle que $\left(z^\beta\right)^{1/\beta} = z$. En échangeant les rôles de β et $\frac{1}{\beta}$, on a la réciproque.

3. La *transformation de Koebe* $K(z) := \frac{z}{(1-z)^2}$ de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1/4]$.
   Calculons formellement l'inverse : on pose $w = \frac{z}{(1-z)^2}$, ce qui donne $wz^2 - 2wz + w - z = 0$.
   Le discriminant de cette équation est $4w+1$, et les solutions formelles sont donc $\frac{2w+1\pm\sqrt{4w+1}}{2w}$. Il faut maintenant trouver le bon "branch cut", c'est-à-dire donner un sens précis à $\sqrt{4w+1}$.
   Pour ce faire, on peut remarquer que $\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Un calcul similaire à celui de la question 1 montre que $\frac{1+z}{1-z}$ envoie $\mathbb{D}$ sur le demi-plan $\Re(z) > 0$, puis que le passage au carré envoie bijectivement $\Re(z) > 0$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leqslant 0}$, et donc K envoie bijectivement $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1/4]$. Pour obtenir sa réciproque, il suffit d'observer la formule $\frac{2w+1\pm\sqrt{4w+1}}{2w}$ et de prendre la détermination de la racine carrée usuelle définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ avec un signe $-$ devant (sinon la fonction n'est pas définie en 0).
   On pose $h : w \mapsto \frac{2w+1-\sqrt{4w+1}}{w}$ et un calcul rapide montre que $h(K(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Comme on a établi plus tôt que K était bijective de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1/4]$, ceci prouve que h est son inverse.

4. La transformation $L(z) := \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ de $\mathbb{D}$ vers $\{w \in \mathbb{C} : |\Im w| < \pi/2\}$.
   Procédons en deux étapes : $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ envoie $\mathbb{D}$ sur $\Re(z) > 0$, et log envoie $\Re(z)$ sur $|\Im(z)| < \pi/2$. La réciproque de $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ est $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$, et la réciproque de $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ est donc $e^{\frac{z-1}{z+1}}$.

5. La *transformation de Joukowski* $J(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ de $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ vers $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.
   Encore une fois, trouvons l'inverse formel : on pose $w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, ce qui donne $z^2 - 2zw + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $4w^2 - 4$, et la solution est donc donnée par $z = w \pm \sqrt{w^2-1}$. Il n'est pas immédiatement évident que $\sqrt{w^2-1}$ puisse être défini sur $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, mais on peut définir $\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leqslant 1}$. et $-\sqrt{1-w}\sqrt{-1-w}$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geqslant -1}$. Ces deux fonctions élevées au carré donnent w^2-1, et elles sont donc égales à signe près sur les composantes connexes de l'intersection de leurs domaines, c'est-à-dire $\Im(z) > 0$ et $\Im(z) < 0$. Il suffit donc de vérifier que leurs valeurs coïncident en i et $-i$ pour prouver qu'elles sont égales et se recollent donc en une fonction holomorphe $\sqrt{w^2-1}$ sur $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.
   Pour la racine carrée usuelle, on a $\sqrt{i-1} = i\sqrt{1-i}$ et $\sqrt{1+i} = i\sqrt{-1-i}$. Ainsi, $\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}$ et $-\sqrt{1-w}\sqrt{-1-w}$ coïncident en i et en $-i$, et on peut les recoller.

[†] Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Il faut finalement décider du signe $\pm$: on remarque que $w-\sqrt{w^2-1}$ est bornée, la réciproque doit donc être $w+\sqrt{w^2-1}$. Un rapide calcul permet de le vérifier.

Exercice 2. Unicité dans le théorème de la représentation conforme.

1. Démontrer qu'il existe un unique biholomorphisme φ de $\mathbb{D}$ qui vérifie $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)\in\mathbb{R}_{>0}$.
   On rappelle que les biholomorphismes de $\mathbb{D}$ sont tous de la forme $\varphi_{a,\theta}(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $a\in\mathbb{D}$. Si $\varphi_{a,\theta}(0)=0$, alors $a=0$ et le biholomorphisme est de la forme $z\mapsto e^{i\theta}z$. Sa dérivée en 0 est $e^{i\theta}$, donc la seule possibilité pour que ce soit un réel positif et qu'elle soit égal à 1.

2. Soient U,V deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ biholomorphes à $\mathbb{D}$, $u\in U, v\in V$. Démontrer qu'il existe un unique biholomorphisme $f:U\to V$ qui envoie u sur v et vérifie $f'(u)\in\mathbb{R}_{>0}$.
   Par la formule $(g\circ f)'(u)=g'(f(u))f'(u)=g'(v)f'(u)$, si $g'(v)>0$ et $f'(u)>0$ alors $g\circ f$ a une dérivée positive en v. On remarque aussi que si $f(u)=v$, alors $(f^{-1})'(v)=\frac{1}{f'(f^{-1}(v))}=\frac{1}{f'(u)}>0$. On fixe U,V ouverts, $u\in U$, $v\in V$. On commence par prouver qu'il existe une unique représentation conforme de U sur $\mathbb{D}$ vérifiant $f(u)=0$, $f'(u)>0$. Soient f_1,f_2 deux telles représentations conformes, alors $\varphi=f_1\circ f_2^{-1}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ envoyant 0 sur 0 et vérifiant $\varphi'(0)>0$, c'est donc l'identité et $f_1=f_2$. Le même résultat est vrai pour V. Il en découle donc que si f_1,f_2 sont deux biholomorphismes de U vers V envoyant u sur v et de dérivée réelle positive en u, en postcomposant par l'unique biholomorphisme $g:V\to\mathbb{D}$ envoyant v sur 0 et vérifiant $g'(v)>0$, on trouve deux biholomorphismes $g\circ f_1, g\circ f_2$ qui envoient u sur 0 et ont une dérivée positive en u et sont donc égaux, donc $f_1=f_2$. Si $V=\mathbb{D}, v=0$, on appelle $\frac{1}{f'(u)}$ le rayon conforme de U en u, noté $R(U,u)$

3. Calculer les rayons conformes suivants :

   (a) $R(\mathbb{D}(0,r),0)$, $R(\mathbb{D}(0,2),1)$,
   La représentation conforme de $\mathbb{D}(0,r)$ vers $\mathbb{D}$ que l'on cherche est $z\mapsto z/r$, et le rayon conforme est donc r.
   Pour $R(\mathbb{D}(0,2),1)$, commençons par considérer $\mathbb{D}(0,2)\to\mathbb{D}$, $z\mapsto z/2$: on a $R(\mathbb{D}(0,2),1)=2R(\mathbb{D},1/2)$. Il faut alors trouver l'unique biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui envoie $1/2$ sur 0 et a une dérivée en $\frac{1}{2}$ positive : il s'agit de
   $$z\mapsto\frac{2z-1}{2-z}$$
   et sa dérivée est $\frac{3}{(2-z)^2}$, donc en $\frac{1}{2}$ on trouve $R(\mathbb{D},1/2)=\frac{3}{4}$, et donc $R(\mathbb{D}(0,2),1)=\frac{3}{2}$. $R(\mathbb{D}(0,r),0)$, $R(\mathbb{D}(0,2),1)$.

   (b) $R(\mathbb{H},i)$,
   On a sous la main la transformation $z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$, qui envoie i sur 0, mais sa dérivée est
   $$\frac{2i}{(z+i)^2}.$$
   Pour avoir une dérivée en i positive, il faut donc considérer $z\mapsto\frac{i(z-i)}{z+i}$, et alors $R(\mathbb{H},i)=2$.

   (c) $R(U,0)$ avec $U=\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
   Indication : pour trouver une équivalence conforme dans ce dernier exemple, on pourra penser à la transformation de Joukowski.
   L'astuce est de voir la situation dans la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. On commence par envoyer $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{P}^1\setminus\overline{\mathbb{D}}$ par $z\mapsto 1/z$. La transformation de Joukowski envoie cet ouvert sur $\mathbb{P}^1\setminus[-1,1]$, et une nouvelle application de $z\mapsto 1/z$ envoie cet ouvert sur U. L'équivalence conforme est donc donnée par
   $$z\mapsto\frac{1}{J(1/z)}.$$
   Elle envoie 0 sur 0 (0 est envoyé sur ∞ par $1/z$, puis par ∞ par J, puis sur 0 par $1/z$.), et on peut calculer la dérivée en 0, qui est donnée par
   $$\left.\frac{J'(1/z)}{z^2J(1/z)^2}\right|_{z=0}.$$
   Comme $J'(1/z)=\frac{1}{2}\left(1-z^2\right)$ et $z^2J(1/z)^2=\frac{1}{4}\left(1+2z^2+z^4\right)$, l'évaluation en 0 donne 2, qui est le rayon conforme.

Exercice 3. Biholomorphismes entre couronnes.
On pose $C(r,R)=\{z\in\mathbb{C}: r<|z|<R\}$.

1. Soient $1<R_1,R_2$ et supposons qu'on a un biholomorphisme $f: C(1,R_1)\to C(1,R_2)$. Démontrer que quitte à considérer R_2/f, on peut supposer que $|f|\to 1$ quand $|z|\to 1$ et $|f|\to R_2$ quand $|z|\to R_1$.
Considérons γ_t le cercle de rayon $1<t<\rho$, et $A(t)=\sup_{z\in f(\gamma_t)}|z|$. Cette fonction est injective sur $]1,R_1[$, sans quoi les courbes simples $f(\gamma_t)$ et $f(\gamma_s)$ se croiseraient et f ne serait pas injective. Si A est décroissante, on peut considérer R_2/f, ce qui change la monotonie de A, qui sera alors croissante. Reste à voir que $\lim_{t\to 1^+}A(t)=1$. Dans le cas contraire, on aurait une suite $(t_n)_n$ décroissante convergeant vers 1 telle que $A(t_n)\to 1+\delta$, et donc une suite $(z_n)_n$, $z_n\in\gamma_{t_n}$, vérifiant $|f(z_n)|\geqslant 1+\delta$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f(z_n)\to w$, et w vérifie $|w|>1$ car $|f(z_n)|\geqslant 1+\delta$ pour tout n.
Mais alors $z_n=f^{-1}f(z_n)$ converge vers $f^{-1}(w)$, et par continuité de f on devrait avoir $w\in C(1,R_1)$, or $|z_n|=t_n\to 1$ donc z_n ne peut pas converger dans $C(1,R_1)$. On en déduit qu'on a bien $A(t)\to 1$ quand $t\to 1^+$, et le même argument montre que $A(t)\to R_2$ quand $t\to R_1^-$.

2. En déduire que la fonction harmonique $\log|f|-\frac{\log(R_2)}{\log(R_1)}\log|z|$ s'étend au bord de $C(1,R_1)$ et y est nulle.
L'harmonicité de $\log|f|-\frac{\log(R_2)}{\log(R_1)}\log|z|$ est évidente, son annulation au bord découle de la question précédente.

3. En considérant une détermination locale du logarithme de f au voisinage de 1, démontrer qu'on doit avoir, au moins sur un voisinage de 1 dans $C(1,R_1)$, $f(z)=Cz^\alpha$ où on spécifiera α.
On pose $\alpha=\frac{\log(R_2)}{\log(R_1)}$, on a $\log|f|=\alpha\log|z|$ sur $C(1,R_1)$. En prenant un voisinage de 1 où $\log(f)$ est définie, on traduit ça comme $\Re(\log(f))=\Re(\alpha\log(z))$ et donc $\log(f)=\alpha\log(z)+ib$ où b est une constante. En passant à l'exponentielle, on trouve bien $f(z)=Cz^\alpha$.

4. Démontrer que si $\alpha\notin\mathbb{Z}$, il n'existe pas de fonction holomorphe sur $C(1,R)$ qui vérifie $f'/f=\frac{\alpha}{z}$.
On va même montrer qu'il n'existe pas de fonction définie holomorphe au voisinage du cercle de centre 0 et de rayon r qui vérifie $f'/f=\frac{\alpha}{z}$. Supposons qu'une telle fonction existe, et considérons $\phi:\theta\mapsto f(re^{i\theta})$. Sa dérivée est
$$\phi'(\theta)=ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})=ire^{i\theta}\frac{\alpha}{re^{i\theta}}f(re^{i\theta})=i\alpha\phi(\theta).$$
Il en découle que $\phi(\theta)=Ce^{i\alpha\theta}$, mais si $\alpha\notin\mathbb{Z}$, on a $\phi(2\pi)=Ce^{2i\pi\alpha}\neq C=\phi(0)$ alors que $f(re^{2i\pi})=f(r)$, c'est une contradiction.

5. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une équivalence conforme de $C(r_1,R_1)$ vers $C(r_2,R_2)$.
D'après la question précédente, tout biholomorphisme $C(1,R_1)\to C(1,R_2)$ doit être de la forme $z\mapsto Cz^{\pm 1}$. Un tel biholomorphisme est forcément de la forme $e^{i\theta}z$ ou $e^{i\theta}R_2/z$ par les conditions au bord déterminées dans la question 1. En l'occurence, on doit donc forcément avoir $R_1=R_2$.
$C(r,R)$ est toujours biholomorphe à $C(1,R/r)$, donc $C(r_1,R_1)$ est biholomorphe à $C(r_2,R_2)$ si et seulement si $R_1/r_1=R_2/r_2$.

6. Expliciter les biholomorphismes de $C(r,R)$ et démontrer que le groupe des biholomorphismes est isomorphe au produit semi-direct
$$\mathbb{U}\rtimes\{\pm 1\}.$$
Décrivons directement une bijection ensembliste entre $\mathbb{U}\times\{\pm 1\}$ et le groupe des biholomorphismes de $C(1,R)$:
$$(\zeta,\varepsilon)\mapsto\varphi_{\zeta,\varepsilon}=z\mapsto\zeta\sqrt{R}\left(\frac{z}{\sqrt{R}}\right)^\varepsilon.$$
Un calcul explicite montre que
$$\varphi_{\zeta',\varepsilon'}\circ\varphi_{\zeta,\varepsilon}=\varphi_{\zeta'\zeta^{\varepsilon'},\varepsilon\varepsilon'}$$
qui est donc bien un produit semi-direct.

Exercice 4. Fonctions harmoniques.
On rappelle que $z\mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ est une équivalence conforme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$.

1. Trouver une équivalence conforme de $\{\Re(z) > 0\}$ vers $\{-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$.
   La fonction log est inversible, d'inverse exp, de $\{\Re(z) > 0\}$ vers $\{-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$.

2. Trouver une fonction harmonique u sur $\mathbb{D}$ qui vérifie $u(z) \to -1$ quand $z \to \zeta$ si $|\zeta| = 1$, $\Im(\zeta) < 0$ et $u(z) \to 1$ quand $z \to \zeta$ si $|\zeta| = 1$, $\Im(\zeta) > 0$.
   Il suffit de trouver une fonction harmonique sur $\{-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$ qui vaut -1 sur $\Im(z) = -\pi/2$ et 1 sur $\Im(z) = \pi/2$, on peut prendre $\frac{2}{\pi}\Im(z)$.
   On vérifie ensuite que exp envoie $\Im(z) = -\pi/2$ sur $D^- = \{\Re(z) = 0\} \cap \{\Im(z) < 0\}$ et $\Im(z) = \pi/2$ sur $D^+ = \{\Re(z) = 0\} \cap \{\Im(z) > 0\}$, et donc $\frac{2}{\pi}\Im(\log(z)) = \frac{2}{\pi}\arg(z)$ vaut 0 sur D^- et 1 sur D^+. Il suffit ensuite de vérifier que $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$, qui est une équivalence conforme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}$, préserve le signe de la partie imaginaire, et donc $\frac{2}{\pi}\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \frac{1}{2}$ définit une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ qui tend vers 1 sur la partie supérieure du cercle et vers -1 sur la partie inférieure.

Exercice 5. Représentations conformes entre rectangles.
On admet le théorème suivant (qui sera prouvé dans un TD futur).
Théorème (Principe de réflexion de Schwarz) :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert symétrique par rapport à $\mathbb{R}$. Supposons que f est une fonction continue sur $\Omega \cap \{\Im(z) \geqslant 0\}$, qui prend des valeurs réelles sur $\Omega \cap \mathbb{R}$ et est holomorphe sur $\Omega \cap \{\Im(z) > 0\}$. Alors il existe un unique prolongement holomorphe de f à Ω, donné par $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Soient R_1, R_2 deux rectangles dans $\mathbb{C}$ et $\varphi : R_1 \to R_2$ une équivalence conforme, s'étendant aux bords et qui envoie les coins de R_1 sur ceux de R_2.
Démontrer que φ s'étend en un biholomorphisme de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorphisme tel que $\varphi = \tilde{\varphi}|_{R_1}$.
On commence par montrer que si l'on choisit un côté c de R_1, on peut prolonger φ à la réunion de R_1 et de son symétrique par rapport à c, et que l'image est le symétrique de R_2 par rapport au côté $\varphi(c)$. Quitte à pré- et post-composer par des rotations et translations (qui sont des biholomorphismes de $\mathbb{C}$), on peut supposer que le côté c de R_1 est un segment de $\mathbb{R}$, que l'image de ce côté par φ, qui est un côté de R_2, est aussi contenu dans $\mathbb{R}$. On applique le principe de réflexion de Schwarz, qui nous permet d'étendre φ à $R_1 \cup \overline{R}_1$, et l'image de $\overline{R}_1$ par l'extension est $\overline{R}_2$, ce qui prouve que l'extension est encore un biholomorphisme sur l'intérieur.
Appelons R_1' la réunion de R_1 et son symétrique par rapport à c, et R_2' la réunion de R_2 et son symétrique par rapport à $\varphi(c)$. Clairement, en choisissant un autre côté, on peut former R_1'', R_2'' et étendre φ en un biholomorphisme entre ces deux rectangles, et ainsi de suite. La réunion des $R_i^{(n)}$ est $\mathbb{C}$ pour $i = 1, 2$, et on a donc étendu φ en un biholomorphisme $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Exercice 6. Les polynômes de Faber
Soit K un compact connexe du plan ayant au moins deux points et tel que $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ soit connexe. On suppose pour plus de simplicité que K contient 0.

1. Montrer que Ω est biholomorphe à $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, puis à $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.
   Considérons $\Omega \cup \{\infty\}$ dans la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$: il est simplement connexe (son image par $z \mapsto 1/z$ est un ouvert connexe dont le complémentaire n'a que des composantes connexes non-bornées), et donc biholomorphe à $\mathbb{D}$, on peut même choisir le biholomorphisme de sorte à ce qu'il envoie ∞ sur 0. La restriction de ce biholomorphisme à Ω donne un biholomorphisme $\Omega \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$, lequel est biholomorphe à $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ par $z \mapsto 1/z$.

2. Expliciter une telle représentation conforme dans le cas où $K = [-1, 1]$.
   C'est la transformation de Joukowski $J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

3. Notons $\Phi \colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ la représentation conforme obtenue. Démontrer que Φ a un pôle simple à l'infini.

   On sait par construction que $1/\Phi(z)$ envoie l'infini sur 0, ce qui veut dire que Φ a un pôle à l'infini. Reste à voir qu'une fonction ayant un pôle d'ordre > 1 ne peut pas être injective au voisinage du pôle ou, de manière équivalente, qu'une fonction holomorphe qui a un zéro d'ordre > 1 ne peut pas être injective au voisinage de ce zéro.
   La raison est le lemme suivant, relativement élémentaire :
   Lemme.

Soit f une fonction holomorphe avec un zéro d'ordre n en 0, c'est-à-dire que $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) \neq 0$. Il existe au voisinage de 0 une racine n-ème de f, c'est-à-dire une fonction g telle que $g(z)^n = f(z)$. De plus, la fonction g est un biholomorphisme au voisinage de 0.
Supposons le lemme vrai : quitte à remplacer $f(z)$ par $f(z-a)$, on peut se ramener à un zéro n'importe où (y compris à l'infini, en remplaçant $f(z)$ par $f(1/z)$). Comme g est un biholomorphisme entre deux voisinages de zéro, elle tous les $\varepsilon\zeta_n^k$, où ε est assez petit et $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Soit z_k l'unique antécédent de ζ_n^k par g : on a $f(z_k) = g(z_k)^n = \varepsilon^n$, et f n'est donc pas injective si $n > 1$.
Reste à prouver le lemme : on écrit $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + ... = a_n z^n(1 - zu(z))$. On choisit une racine n-ème de a_n, disons α. Il suffit ensuite de composer la fonction holomorphe $1 - zu(z)$, qui envoie un voisinage de u_0 au voisinage de 1, avec la fonction racine n-ème, définie au voisinage de 1. On pose $g(z) = \alpha z \sqrt[n]{1 - zu(z)}$, qui vérifie bien $g(z)^n = f(z)$.
Pour voir que f est un biholomorphisme au voisinage de 0, il suffit par le théorème d'inversion locale (Comme la différentielle de l'inverse est l'inverse de la différentielle, l'inverse C^1 d'une fonction holomorphe bijective est holomorphe) de vérifier que $g'(0) \neq 0$, ce qui est clair vu la formule donnée. On définit alors le *n-ième polynôme de Faber associé à K*, F_n comme étant la partie polynomiale de Φ^n i.e.

$$F_n(z) = \Phi(z)^n + O_\infty(1/z).$$

4. Calculer les polynômes de Faber dans le cas $K = \overline{\mathbb{D}}(0, r)$ avec $r > 0$.
   Dans le cas $K = \overline{\mathbb{D}}(0, r)$, on peut calculer explicitement Φ, qui est donnée par $z \mapsto z/r$, et $F_n(z) = z^n/r^n$.

5. Démontrer que pour $z \in K$, et n'importe quel contour simple C^1 par morceaux dans Ω, on a

$$F_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Phi(\zeta)^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

   On peut se ramener par Cauchy à un cercle au voisinage de l'infini, sur lequel Φ s'écrit $\Phi(z) = az + b + h(1/z)/z$ avec h série entière convergente. On a donc $\Phi(z)^n = F_n(z) + h_n(1/z)/z$ avec h_n série entière convergente. Prouvons dans un premier temps que

$$\int_{\gamma_R} \frac{h_n(1/\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 0$$

   avec γ_R un cercle de rayon $R >> 0$.
   En paramétrant, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{h_n(1/\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{h_n(R^{-1}e^{-i\theta})}{Re^{i\theta}(Re^{i\theta} - z)} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{h_n(R^{-1}e^{-i\theta})}{Re^{i\theta} - z} d\theta. \end{aligned}$$

   Cette dernière intégrale tend vers 0 quand $R \to \infty$, et comme elle est constante, elle vaut 0. Reste à évaluer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

   qui vaut $F_n(z)$ par la formule de Cauchy.

6. Soit Ψ l'application réciproque de Φ. Démontrer que si $z \in K$ et γ est un contour dans Ω tel que $|w| > \sup_t |\Psi(\gamma(t))|$, alors :

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \frac{1}{w - \Phi(\zeta)} d\zeta$$

   et en déduire que pour tout $|w| > 1$, on a

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$$

avec convergence uniforme sur $|w| \geqslant 1+\varepsilon$.
Partons de l'intégrale à droite et appliquons le théorème des résidus. Les pôles de l'intégrande sont en $\zeta = z$ et en $\zeta = \Psi(w)$. L'astuce ici est d'être malin.e et de considérer γ comme un lacet « dans l'autre sens », autour de l'infini (On considère de le lacet $t \mapsto \frac{1}{\gamma(t)}$, qui a un indice -1 autour de l'infini et aussi a fortiori autour de $\Psi(w)$). Comme Φ a un pôle à l'infini, $\frac{1}{(\zeta-z)(w-\Phi(\zeta))}$ a un zéro d'ordre 2 en l'infini, et n'a donc pas de résidu à l'infini. On trouve donc, par le théorème des résidus

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w-\Phi(\zeta)}d\zeta = -\mathrm{Res}_{\Psi(w)}\frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w-\Phi(\zeta)}$$

Comme Φ est bijective, le zéro de $w-\Phi$ en $\Psi(w)$ est simple et le pôle est donc simple. Le résidu est donc

$$\mathrm{Res}_{\Psi(w)}\frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w-\Phi(\zeta)} = -\frac{1}{\Psi(w)-z}\frac{1}{\Phi'(\Psi(w))}.$$

La formule de la dérivée d'une fonction réciproque permet de conclure pour la première formule.
Pour la deuxième, on développe

$$\frac{1}{w-\Phi(\zeta)} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\Phi(\zeta)^n}{w^{n+1}}.$$

On va intégrer sur le lacet γ_r défini comme l'image réciproque du cercle $|z| = r$, $r > 1$, par Φ, ce qui garantit la convergence uniforme dans la formule ci-dessus pour $|w| \geqslant r+\varepsilon$ pour tout ε. On intègre, et on a

$$\begin{aligned}\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w-\Phi(\zeta)}d\zeta\\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n\geqslant 0}\int_{\gamma_r}\frac{\Phi(\zeta)^n}{w^{n+1}(\zeta - z)}d\zeta\\ &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{F_n(z)}{w^{n+1}}.\end{aligned}$$

qui converge donc uniformément pour $|w| \geqslant 1+\varepsilon$.

7. Si U est un ouvert connexe contenant K et si $f \in \mathcal{O}(U)$, montrer que f se développe sur K en série de polynômes de Faber associés à K et que cette série converge uniformément sur K.
Soit γ un chemin C^1 par morceaux dans U qui encercle K : pour $z \in K$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Par changement de variable $\zeta \to \Psi(\zeta)$, on trouve

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Phi\circ\gamma} f(\Psi(\zeta))\frac{\Psi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)-z}d\zeta\\ &= \sum_{n\geqslant 0}F_n(z)\int_{\Phi\circ\gamma}\frac{f(\Psi(\zeta))}{\zeta^{n+1}}d\zeta.\end{aligned}$$

Reste à voir la convergence uniforme sur K découle de la convergence uniforme sur K de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$ pour $|w| \geqslant 1+\varepsilon$. Le chemin $\Phi\circ\gamma$ a une image compacte contenue dans $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ et il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $|\zeta| \geqslant 1+\varepsilon$ sur $\Phi\circ\gamma$, ce qui prouve la convergence uniforme.